**Лабораторная работа № 4**

**E5.1** Рассмотрим снова персептрон, описанный в Задаче P5.1. Если b <> 0, покажите, что граница решения не является векторным пространством.

**E5.2** Какова размерность векторного пространства, описанного в Задаче P5.1?

**E5.3.** Рассмотрим множество всех непрерывных функций, удовлетворяющих условию f(0) = 0. Покажите, что это векторное пространство.

**E5.4.** Покажите, что множество матриц 2 x 2 является векторным пространством.

**E5.5**. Рассмотрим сеть персептрона со следующими весами и смещениями:

W = [1 0 -1], b = 0.

1. Напишите уравнения для граничных решений.
2. Покажите, что граничные решения являются векторным пространством. (Продемонстрируйте, что 10 критериев удовлетворяются для любой точки на границе.)
3. Какова размерность векторного пространства?
4. Найдите базисное множество для векторного пространства.

E5.6. Три части этого вопроса относятся к подмножествам множества вещественных непрерывных функций, определенных на отрезке [0,1]. Скажите, какое из этих подмножеств являются векторными пространствами. Если подмножество не является векторным пространством, определите, какой из 10 критериев не выполняется.

1. Все функции такие, что f(0.5) = 2.
2. Все функции такие, что f(0.75) = 0.
3. Все функции такие, что f(0.5) = - f(0.75) – 3.

**E5.7**. Следующие три вопроса относятся к подмножествам множества вещественных многочленов, определенных над вещественной линией (например, 3 + 2t + 6t2). Скажите, какое из этих подмножеств есть векторные пространства. Если подмножество не является векторным пространством, определите, какой из 10 критериев не выполняется.

1. Полиномы степени 5 или менmit.
2. Многочлены, положительные для положительных t.
3. Полиномы, стремящиеся к нулю при t, стремящихся к нулю.

**E5.8** Какой из следующих наборов векторов являются независимыми? Найти размерность векторного пространства, натянутого на каждый набор. (Проверьте свои ответы в части (i) и (iv), используя MATLAB для функции rank.)

1. [1 2 3]T [1 0 1] T [1 2 1] T
2. sint cost cos(2t)
3. 1 + t 1 – t
4. [1 2 2 1] T [1 0 0 1] T [3 4 4 3] T

**E5.9** Вспомните проблему распознавания яблока и апельсина главы 3. Найдите углы между каждым из образцов прототипа (апельсина и яблока) и шаблон тестового ввода (продолговатого апельсина). Убедитесь, что углы создают интуитивный смысл.

p1 = [1 -1 -1]T (апельсин) p2 = [1 1 -1]T (яблоко) p = [-1 -1 -1] T

**E5.10** Используя следующие базисные векторы, найдем ортогональное множество, использующее ортогонализацию Грамма-Шмидта. (Проверьте свой ответ, используя MATLAB.)

y1 = [1 0 0] y2 = [1 1 0] y3 = [1 1 1]

E5.11. Рассмотрим векторное пространство всех кусочно-непрерывных функций на отрезке [0, 1]. Множество (f1, f2, f3), которое определено на рисунке E15.1, содержит три вектора из этого векторного пространства.

1. Покажите, что это множество линейно независимо.
2. Создайте ортогональный набор, используя процедуру Грамма-Шмидта. Внутреннее произведение определяется как

(f,g) = ∫01 f(t)g(t)dt,

где f(t) и g(t) определены на Рисунке E15.1 (Базисный набор для упражнений E5.11) (см. в книге!)

**E5.12**. Рассмотрим векторное пространство всех кусочно-непрерывных функций на отрезке [0,1]. Множество (f1, f2), которое определено на рисунке E15.2, содержит два вектора из этого векторного пространства. (Смотри в книге!)

1. Создайте ортогональный набор, используя процедуру Грамма-Шмидта. Внутреннее произведение определяется как выше, где f и g определены на Рисунок E15.3 (Векторы f и g для упражнения E5.12 часть ii) (См. в книге!)
2. Разверните векторы f и g на рисунке E15.3 в терминах ортогонального набора, который вы создали в Части 1. Объясните все проблемы, которые вы найдете.

**E5.13.** Рассмотрим множество многочленов степени 1 или меньше. Это линейное векторное пространство. Один базис, установленный для этого пространства,

{u1 = 1, u2 = t}

Используя это базисное множество, многочлен y = 2 + 4t может быть представлен как

yu = [2 4]T

Рассмотрим новый базисный набор

{v1 = 1 + t, v2 = 1 - t}

Используйте соответствующие базисные векторы, чтобы найти представление **y** в терминах этого нового базисного множества.

**E5.14**. Вектор x можно разложить по базисным векторам {v1, v2} в виде

x = 1v1 +1v2

Векторы v1 и v2 могут быть расширены через базисные векторы в виде {s1, s2}

v1 = 1s1 -1s2

v2 = 1s1 + 1s2

1. Найти разложение по х через базисные векторы {s1, s2}.
2. Вектор y можно разложить по базисным векторам {s1, s2}

y = 1s1 +1s2

Найти разложение y через базисные векторы {v1, v2}.

**E5.15**. Рассмотрим векторное пространство всех непрерывных функций на отрезке [0,1]. Множество {f1, f2}, которое определено на рисунке ниже, содержит два вектора из этого векторного пространства.

(Рисунок см. в книге!)

Рисунок E15.4 Независимые векторы для упражнений E5.15

1. Из этих двух векторов генерируем ортогональное множество {g1, √g2}, используя процедуру Грама-Шмидта. Внутреннее произведение определяется как выше в виде интеграла. Выделите два ортогональных вектора g1 и g2 как функцию времени.
2. Разверните следующий вектор fi в терминах ортогонального множества, которое вы создали в части i., используя формулу. (5,27). Демонстрируйте, что расширение правильное, воспроизведя h как комбинацию g1 и g2.

(Смотри рис. в книге!)

Рисунок E15.5 Вектор для упражнений E5.15

**E5.16.** Рассмотрим множество всех комплексных чисел. Это можно рассматривать как векторное пространство, поскольку оно удовлетворяет десяти определяющим свойствам. Мы можем также определить скалярное произведение для этого векторного пространства (x, y) = Re(x)Re(y) + Im(x)Im(y), где Re(x)- действительная часть и Im(x) является мнимой частью. Это приводит к следующему определению для нормы: ||х|| = √(x, y).

1. Рассмотрим следующее базисное множество для описанного выше векторного пространства: v1 = 1 + 2j, v2 = 3 + j. Используя метод Грамма-Шмидта, найдем ортогональное базисное множество.
2. Используя ваш ортогональный базис, заданный из части i., найдите векторные разложения для u1 = 1 – j, u2 = 1 + j и x = 3 + j. Это позволит вам писать x, u1 и u2 как столбцы чисел x, u1 и u2.
3. Теперь мы хотим представить вектор x, используя базисное множество {u1, u2}. Используйте векторы взаимной основы, чтобы найти разложение x по базисным векторам {u1, u2}. Это позволит вам написать x как новый столбец чисел xu.
4. Покажите, что представления для х, которые вы нашли в частях ii. и iii. эквивалентны (два столбца чисел x и xu оба представляют один и тот же вектор x).

**E5.17** Рассмотрим векторы, определенные на рисунке E15.6. Набор {s1, s2} является стандартным базисным множеством. Множество {u1, u2} представляет собой альтернативный базисный набор. Вектор x представляет собой вектор, который мы хотим представить относительно двух базисных множеств.

(Смотри рисунок в книге!)

Рисунок E15.6. Векторные определения для упражнений E5.17

1. Напишите расширение x в терминах стандартного базиса {s1, s2}.
2. Напишите разложения для u1 и u2 через стандартный базис {s1, s2}.
3. Используя базисные векторы, напишите разложение для х в терминах базиса {u1, u2}.
4. Нарисуйте эскизы, аналогичные рис. 5.2, демонстрирующие, что расширения части i. и часть iii эквивалентны.

**E5.18**. Рассмотрим множество всех функций, которые могут быть записаны в форме Asin(t + β). Это множество можно рассматривать как векторное пространство, так как оно удовлетворяет десяти определяющим свойствам.

1. Рассмотрим следующее базисное множество для описанного выше векторного пространства: v1 = sin(t), v2 = cos(t). Представить вектор x = 2sin(t) + 4cos(t) как столбец чисел xα (найти векторное разложение), используя этот базисный набор.
2. Используя базовый набор из части i., Найдите векторные разложения для u1 = 2sin(t) + cos(t), u2 = 3sin(t).
3. Теперь мы хотим представить вектор x из части i, используя базисное множество {u1, u2}. Используйте базисные векторы чтобы найти разложение для х по базисным векторам {u1, u2}. Это позволит вам написать для х новый столбец чисел xu.
4. Покажите, что представления для х, которые вы нашли в частях i. и iii. эквивалентны (два столбца чисел xu и xα - оба представляют один и тот же вектор х).

**E5.19** Предположим, что мы имеем три вектора: x, y и z из X. Мы хотим добавить несколько кратных y в x, так что результирующий вектор ортогонален z.

1. Как бы вы определили соответствующий кратный y для добавления x?
2. Проверьте свои результаты в части i. используя следующие векторы

x = [1 0]T y = [1 0.5] T z = [0.5 1] T

1. Используйте эскиз, чтобы проиллюстрировать ваши результаты из части ii.

**E5.20** Развернуть x = [1 2 2]T в терминах следующего базисного множества. (Проверьте свой ответ с помощью MATLAB.)

v1 = [-1 1 0]T v2 = [1 1 -2]T v3 = [1 1 0]T

**E5.21** Найдите значение a, которое делает минимум ||x – ay||. (Use. ||x|| = (x, x)1/2). Покажите, что для этого значения a вектор z = x – ay ортогонален y и что

||x – ay||2 + ||ay||2 = ||x||2.

(Вектор ay - проекция x на y.) Нарисуйте диаграмму для случая, когда x и y двумерны. Объясните, как эта концепция связана с ортогонализацией Грамма-Шмидта